a-Brüche

Einem gegebenen a-Bruch $(z_1 z_2 \dots z_h, z_{h+1} \dots)_a$ wird die Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n],\ n = 1, 2, \dots$ mit

(*) $$a_n := \sum_{i=1}^{n} z_i a^{h-i}, \quad b_n := a_n + a^{h-n}$$

zugeordnet.

a) Bestimmen Sie für den Dualbruch $(1010, 101010\dots)_2$ diese Intervallschachtelung und die eindeutig bestimmte reelle Zahl, die allen diesen Intervallen angehört.

b) Zu jeder reellen Zahl x > 0 existiert ein a-Bruch, so dass $x \in [a_n, b_n),\ n \in \mathbb{N}$ mit a_n, b_n entsprechend (*) gilt. Zeigen Sie, dass für die Ziffern z_n dann auch die folgende Beziehung gilt:
$$z_n = \left\lfloor x a^{n-h} \right\rfloor - a \left\lfloor x a^{n-h-1} \right\rfloor.$$
(Hierbei bezeichnet $\lfloor y \rfloor$ den ganzen Anteil einer reellen Zahl y.)

c) Bestimmen Sie die (periodischen) a-Bruchentwicklungen der Zahlen $z = 1/(a-1)^2$ für $a = 3, 4, 5, 6, 7$. Welche Vermutung ergibt sich für den Fall eines beliebigen $a \in \mathbb{N},\ a \geq 2$? Versuchen Sie, Ihre Vermutung zu beweisen.